4.1. Le equazioni di De Saint-Venant

Il moto vario delle correnti a pelo libero si può descrivere matematicamente introducendo opportune ipotesi. In primo luogo, si farà nel seguito riferimento a:

1) Fluido incomprimibile, ovvero caratterizzato da densità di massa costante.
2) correnti lineari o gradualmente variate. Si ricorda che dette correnti sono caratterizzate da variazioni delle caratteristiche geometriche e cinematiche graduali nel tempo e nello spazio. Ne consegue che le traiettorie delle particelle fluide nella corrente sono sensibilmente rettilinee e parallele; in tali condizioni le componenti del vettore velocità nel piano normale alla direzione della corrente sono nulle e la pressione è distribuita nella sezione trasversale (ovvero quella che si ottiene tagliando la corrente con il piano ad essa normale) secondo la legge idrostatica. Ne consegue che le sezioni trasversali sono piane e in una sezione assegnata il carico piezometrico è costante. In seguito a tale assunzione, le correnti lineari possono essere trattate con la teoria monodimensionale, essendo completamente definite da una variabile geometrica ed una cinematica, che assumono unico valore nella sezione trasversale.
3) Sezioni trasversali verticali, ovvero pendenza di fondo limitata. Questa configurazione fa sì che, in un'assegnata sezione trasversale, si possa confondere l'affondamento del fondo dell'alveo con l'altezza idrica nella sezione trasversale. Ciò fa sì che l'altezza piezometrica nella sezione trasversale coincida con la quota del pelo libero rispetto al medesimo sistema di riferimento.
4) Afflussi e deflussi laterali nulli; ovvero si assume che siano nulli gli scambi idrici attraverso la superficie laterale della corrente. Quest'ultima assunzione può essere facilmente rimossa.

Sotto tali assunzioni, essendo la corrente completamente descritta da due variabili (si veda l'assunzione 3 innanzi introdotta), il moto vario della corrente a pelo libero in riferimento ad un assegnato volume di controllo è descritto da un modello che deve contenere due equazioni costitutive; ovvero una relazione di bilancio di massa ed una relazione di bilancio della quantità di moto. Tali equazioni posso essere ricavate dalla equazione convettiva-dispersiva in forma monodimensionale.

4.1.1. L'equazione convettiva-dispersiva

Assegnato un generico volume di controllo contenente un fluido fermo od in movimento, l'equazione convettiva-dispersiva esprime il bilancio di una qualsivoglia grandezza la cui massa sia proporzionale al volume di fluido contenuto. Ad esempio, l'energia o la quantità di moto soddisfano al requisito innanzi menzionato. Dette grandezze si indicano anche con la terminologia di *grandezze estensive*, in contrapposizione alle grandezze intensive quali ad esempio la temperatura.

L'equazione convettiva-dispersiva, esprimendo il bilancio di una qualsivoglia grandezza rispetto a qualsivoglia volume di controllo, può essere utilizzata quale equazione costitutiva in numerosi modelli idrologici. Rappresenta quindi uno strumento di elevato interesse nell'ambito della modellistica idrologica e per questa ragione se ne descriveranno sinteticamente le caratteristiche.

Indicata con P la massa totale della grandezza estensiva considerata (la cui unità di misura non viene indicata trattandosi per ora di una grandezza generica), la sua concentrazione si indicherà con il simbolo $p = dP/dV$ e rappresenta una proprietà intensiva. P e p sono in generale variabili in funzione delle 3 coordinate spaziali e del tempo. In quanto segue, detta dipendenza non verrà sempre esplicitamente indicata per semplificare la simbologia.
In forma tridimensionale ed in riferimento al volume di controllo assegnato V, il bilancio innanzi menzionato si può scrivere nella forma [*Rinaldi, et al.*, 1979]:

$$\frac{\partial P(x,y,z,t)}{\partial t} = \int_s p(x,y,z,t)\mathbf{v}(x,y,z,t) \times \mathbf{n}\, dS + \int_V \xi(x,y,z,t) dV \quad , \qquad (\#\#\#)$$

nella quale S è la superficie laterale di V, $\mathbf{v}$ rappresenta il vettore velocità della concentrazione p nell'elemento infinitesimo ds, $\mathbf{n}$ è il versore della normale entrante in ds e ξ è il tasso di produzione di massa per unità di volume ed unità di tempo della grandezza P all'interno del elemento infinitesimo dV. Il primo termine a secondo membro rappresenta il flusso della grandezza P attraverso la superficie S, mentre il secondo termine rappresenta la quantità di P generata all'interno di V. E' importante notare che la velocità $\mathbf{v}$ della concentrazione p non coincide con la velocità del fluido.
L'equazione (82) può essere scritta in forma più semplice trascurando alcuni fenomeni che intervengono nella determinazione del flusso attraverso la superficie S. Ciò nondimeno, l'integrazione dell'equazione di bilancio di massa in forma tridimensionale presenta difficoltà spesso non trascurabili, soprattutto in merito alla specifica delle condizioni iniziali ed al contorno, che richiedono la conoscenza della geometria di dettaglio del volume di controllo.
Tuttavia, occorre osservare che nei processi idrologici spesso è lecito trascurare le variazioni delle grandezze oggetto di analisi in una o due direzioni dello spazio cartesiano, riconducendosi quindi ad una forma bidimensionale o monodimensionale della (82). In particolare, qualora ci si riferisca ad una corrente idrica gradualmente variata è lecito in molte applicazioni pratiche considerare la variabilità lungo la sola direzione longitudinale, ovvero rispetto all'ascissa curvilinea misurata lungo la direzione della corrente. In tal caso, riferendosi ad un tronco di corrente compreso fra due sezioni trasversali e delimitato dal fascio di linee di corrente tangenti al perimetro delle sezioni stesse, la (82) si può scrivere in forma monodimensionale ottenendo

$$\frac{\partial [A(s,t)p(s,t)]}{\partial t} + \frac{\partial A(s,t)v(s,t)p(s,t)}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} A(s,t)D(s,t)\frac{\partial p(s,t)}{\partial s} = A(s,t)\Xi(s,t) \quad , \qquad (\#\#\#)$$

nella quale A indica l'area della sezione trasversale della corrente, s è l'ascissa fluviale, v è la velocità media del fluido nella sezione trasversale, D è il coefficiente di dispersione che verrà discusso in quanto segue e Ξ è il termine di sorgente, ovvero il tasso di produzione di P per unità di tempo ed unità di volume del fluido. E' importante notare che nella (83) v indica la velocità media del fluido e non della concentrazione p.
Il primo termine a primo membro rappresenta la variazione di massa nel tempo della grandezza considerata, per unità di ascissa fluviale e in un punto fisso dello spazio.

Ovvero, è la variazione di P nel tempo vista da un osservatore fermo sulla riva del fiume. Il secondo termine a primo membro dà conto del *trasporto convettivo*, ovvero il trasporto di massa di P causato dal moto medio della corrente.
Il terzo termine a primo membro consente di tenere conto del trasporto di massa di P dovuto alla dispersione, ovvero al movimento di massa di P indipendente dal moto medio del fluido. Il termine D è chiamato *coefficiente di dispersione* e tiene conto di tre meccanismi di trasporto di massa di P: a) dispersione turbolenta, ovvero il fenomeno di trasporto di massa P dovuto alle agitazioni turbolente del vettore velocità, che si rendono responsabili di movimenti che si sovrappongono al moto medio del fluido; b) diffusione molecolare, ovvero il fenomeno in accordo al quale, anche in un fluido in quiete, la massa di P si muove da zone a maggior concentrazione verso zone a minore concentrazione (si pensi alla goccia di inchiostro lasciata cadere in un bicchiere d'acqua); c) non uniformità del vettore velocità nella sezione trasversale, che fa si che la velocità locale del fluido sia diversa rispetto alla velocità media nella sezione trasversale.
E' interessante osservare che la condizione $D = 0$ implica che il trasporto di massa di P avvenga solo per effetto del moto medio del fluido. Qualora siano presenti meccanismi di trasporto di tipo diverso, D assume valore non nullo.
Il terzo termine a primo membro e il termine a secondo membro rappresentano la variazione di concentrazione vista da un osservatore solidale al moto della corrente. Ne consegue che in assenza di dispersione ed in assenza di termine di sorgente detto osservatore vede valori costanti di concentrazione.
Il modello monodimensionale dato dalla (83) presenta limitazioni significative. Infatti, l'assunzione di distribuzione uniforme della velocità nella sezione trasversale può rivelarsi poco attendibile in molte situazioni pratiche. In particolare, la presenza di zone ad acqua ferma o di velocità della corrente estremamente differenziata lungo la direzione verticale e trasversale costituiscono situazioni non riproducibili mediante la (83).

4.1.2. Derivazione delle equazioni di De Saint-Venant mediante l'equazione convettiva-dispersiva.

La relazione di bilancio di massa monodimensionale espressa dalla (83) può essere utilizzata per ricavare le equazioni del moto vario delle correnti a pelo libero gradualmente variate. Infatti, a seguito della assunzione 2 (si veda la pagina 43) la corrente idrica può essere trattata con la teoria monodimensionale e quindi con l'equazione di bilancio di massa espressa dalla (83). Considerando nell'ambito della (83) la densità di massa dell'acqua ρ quale grandezza p della quale operare il bilancio, si ottiene

$$\frac{\partial [A(s,t)\rho]}{\partial t} + \frac{\partial [A(s,t)v(s,t)\rho]}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} A(s,t)D(s,t)\frac{\partial \rho}{\partial s} = A(s,t)S(s,t) \quad . \qquad \text{(###)}$$

L'assunzione di fluido incomprimibile (assunzione 1, si veda la pag. 43) implica che ρ sia costante nello spazio e nel tempo; si ottiene quindi

$$\frac{\partial A(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(s,t)}{\partial s} = 0 \quad , \qquad \text{(###)}$$

nella quale si è posto $Q(s,t) = A(s,t)v(s,t)$ e si è assunto che il termine sorgente sia nullo, ovvero che non si verifichino afflussi e deflussi idrici lungo direzioni diverse da quella longitudinale. E' immediato riconoscere nella (85) l'equazione di continuità per le correnti, ovvero la prima delle due equazioni di De Saint-Venant.
Considerando nella (83) la quantità di moto per unità di volume ρv $[M/(L^2T)]$ della corrente quale grandezza p della quale operare il bilancio, ponendo $D = 0$ e omettendo nella dimostrazione che segue la dipendenza delle variabili dallo spazio e dal tempo per semplificare la simbologia, si ottiene

$$\frac{\partial(A\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(A v^2 \rho)}{\partial s} = A\Xi \quad . \qquad (\#\#\#)$$

L'assunzione di dispersione nulla ($D = 0$) si giustifica constatando che, se il fluido è incomprimibile e la corrente è gradualmente variata, la quantità di moto della corrente non può che muoversi solidalmente alla velocità media della corrente stessa. Ciò non accade nel caso in cui la velocità non sia costante nella sezione trasversale, poiché in questo caso alcune particelle fluide viaggiano a velocità diversa dalla velocità media della corrente. Il termine di sorgente S rende conto degli apporti e delle perdite distribuite di quantità di moto per effetto delle forze esterne.
Il termine sorgente può essere quantificato facendo ricorso al teorema dell'impulso. Questo esprime che la velocità di variazione della quantità di moto di un corpo di massa M è pari alla risultante F delle forze esterne applicata al centro di massa del corpo stesso; ovvero

$$\frac{d(Mv)}{dt} = dF \quad . \qquad (\#\#\#)$$

Se ne deduce che il termine sorgente Ξ, ovvero la variazione di quantità di moto per unità di tempo ed unità di volume del fluido, è pari a dF/V.
Facendo riferimento al volume di controllo costituito da un tronco di corrente di lunghezza unitaria ds, il termine di sorgente è composto da tre forze che concorrono a determinare la risultante F:

1) la componente lungo la traiettoria della forza di gravità.
2) la componente lungo la traiettoria delle forze di pressione
3) la resistenza al moto (forze tangenziali sul contorno del volume di controllo).

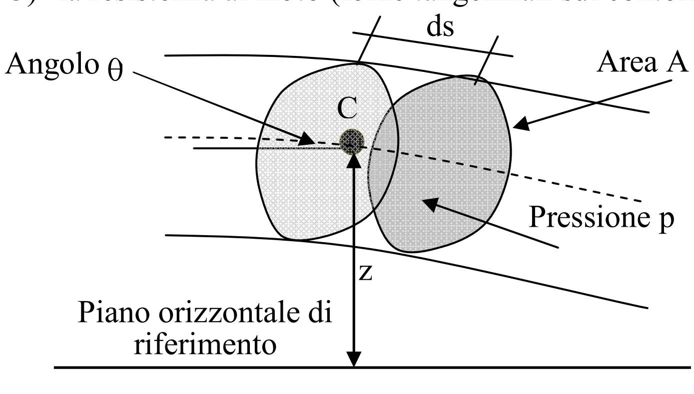

Figura 4.1. Rappresentazione schematica del volume di controllo per l'applicazione dell'equazione convettiva-dispersiva al bilancio della quantità di moto.

Al riguardo del primo addendo, in seguito all'assunzione 4 (si veda a pagina 43) la componente lungo la direzione del moto delle forze di gravità, per unità di volume del fluido, si può scrivere come

$$\rho g\, sen\theta = -\rho g \frac{\partial z}{\partial s}, \qquad (\#\#\#)$$

ove g [L/T^2] indica l'accelerazione di gravità, z [L] è la coordinata del baricentro del volume di controllo rispetto ad un piano orizzontale di riferimento e θ [-] è la pendenza della traiettoria in corrispondenza del baricentro del volume di controllo.
Il secondo addendo del termine di sorgente, ovvero la componente delle forze di pressione per unità di volume del fluido sulla superficie del volume di controllo, si scrive come

$$\frac{1}{A\,ds}\left\{ pA - \left[pA + \frac{\partial [pA]}{\partial s} ds \right] + p\frac{\partial A}{\partial s} ds \right\}, \qquad (\#\#\#)$$

ove il termine in parentesi quadra tiene conto della variazione di pressione del fluido lungo il tratto infinitesimo *ds* mentre l'ultimo termine nella parentesi graffa tiene conto della variazione lungo *ds* della sezione trasversale *A*.
Infine, il terzo addendo del termine di sorgente, ovvero il termine di dissipazione di quantità di moto per unità di volume del fluido indotta dalle resistenze al moto, si stima a partire dall'azione tangenziale esercitata dalla corrente sulle sponde, che è pari a [*Citrini & Noseda*, 1988]

$$\tau = \rho g R J, \qquad (\#\#\#)$$

ove J [-] è la cadente piezometrica, ovvero la perdita di energia per unità di peso della corrente e per unità di lunghezza del corso d'acqua e R [L] è il raggio idraulico della corrente; quest'ultimo è pari ad A/P, dove P [L] è il perimetro bagnato della corrente. Di conseguenza la forza resistente T [ML/T^2] è pari a

$$T = \rho g \frac{A}{P} JPds. \qquad (\#\#\#)$$

Ne consegue che la forza resistente espressa per unità di volume è pari a

$$\rho g J. \qquad (\#\#\#)$$

Si può quindi scrivere:

$$AS = -\rho g A\left[\frac{\partial h_f}{\partial s} + \frac{\partial h_c}{\partial s} + J \right] + \frac{1}{ds}\left[pA - pA - p\frac{\partial A}{\partial s}ds - A\frac{\partial p}{\partial s}ds + p\frac{\partial A}{\partial s}ds \right], \qquad (\#\#\#)$$

ove h_f e h_c [L] sono le quote, rispettivamente, del fondo e del baricentro della sezione trasversale. Semplificando a secondo membro si ottiene

$$AS = -\rho g A\left[\frac{\partial h_f}{\partial s} + \frac{\partial h_c}{\partial s} + J\right] - A\frac{\partial p}{\partial s} \quad . \tag{###}$$

Sostituendo e dividendo per ρ, che sotto l'ipotesi di fluido incomprimibile è costante, si ottiene

$$\frac{\partial(Av)}{\partial t} + \frac{\partial(Av^2)}{\partial s} = -gA\left[\frac{\partial h_f}{\partial s} + \frac{\partial h_c}{\partial s} + J + \frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial s}\right] \ , \tag{###}$$

e quindi:

$$v\frac{\partial A}{\partial t} + A\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial Av}{\partial s} + Av\frac{\partial v}{\partial s} = -gA\left[-i_f + \frac{\partial h_c}{\partial s} + J + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}\right] . \tag{###}$$

Ricordando l'equazione di continuità (85) si ottiene:

$$A\frac{\partial v}{\partial t} + Av\frac{\partial v}{\partial s} = -gA\left[-i_f + \frac{\partial h_c}{\partial s} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} + J\right] . \tag{###}$$

Dividendo per gA si ottiene:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s} = i_f - \frac{\partial h_c}{\partial s} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} - J \, . \tag{###}$$

Ricordando che $h_c + p/\gamma = h$, ove h [L] è la quota del pelo libero rispetto al punto più depresso della sezione (corrente gradualmente variata e sezioni trasversali sensibilmente piane e verticali), evidenziando di nuovo la dipendenza delle variabili da s e t si ricava:

$$\frac{\partial h(s,t)}{\partial s} + \frac{1}{g}\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} + \frac{v(s,t)}{g}\frac{\partial v(s,t)}{\partial s} = i_f - J(s,t). \tag{###}$$

che è l'equazione dinamica di De Saint-Venant espressa nelle variabili h e v (una geometrica ed una cinematica).
Accoppiando la (85) con la (99) si ottiene il sistema delle due equazioni di De Saint-Venant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h(s,t)}{\partial s} + \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial v(s,t)}{\partial t} + \dfrac{v(s,t)}{g}\dfrac{\partial v(s,t)}{\partial s} = i_f - J(s,t) \\ \dfrac{\partial Q(s,t)}{\partial s} + \dfrac{\partial A(s,t)}{\partial t} = 0 \end{cases} . \qquad (\#\#\#)$$

valide sotto le ipotesi innanzi menzionate. Si ottiene quindi un sistema alle derivate parziali di tipo iperbolico, in due incognite che dipendono da *s* e *t*, una di tipo geometrico ed una di tipo cinematico.
La letteratura propone numerose metodi per l'integrazione del sistema (100), che in questa sede non verranno trattati, così come non verranno fatti ulteriori cenni alla teoria del deflusso delle correnti a pelo libero. Nonostante non manchino esempi di modelli di propagazione, quale ad esempio il Mike 11, che risolvono il sistema (100) e possono essere utilizzati nell'ambito di un modello idrologico integrato, gli approcci basati sulle equazioni di De Saint-Venant in forma completa sono utilizzati non frequentemente in idrologia, in ragione della difficoltà insita nel reperimento delle informazioni necessarie per definire la geometria d'alveo. Per tale ragione, si opta non raramente per l'utilizzo di modelli di propagazione semplificati, che in taluni casi fanno uso di schematizzazioni di tipo concettuale. Esempi ben noti di tale tipo di approccio sono il Modello Parabolico (onda diffusiva) ed il Modello Cinematico (onda cinematica).